

# 第十一章 无穷级数

幂级数及其展开式

同步练习

## 11.2.一

1. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} x^n$  的收敛半径  $R = \underline{\hspace{2cm}}$

解 没有缺省项,  $a_n = \frac{1}{n \cdot 4^n}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1) \cdot 4^{n+1}}}{\frac{1}{n \cdot 4^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4(n+1)} = \frac{1}{4} = \rho$$

$$R = \frac{1}{\rho} = 4$$

## 11.2.一

2. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  的收敛区间为\_\_\_\_\_

解 (1)求收敛半径, 没有缺省项,  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 = \rho \quad R = \frac{1}{\rho} = 1$$

(2)判别端点的敛散性

$x = 1$ 时,  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  收敛,

$x = -1$ 时,  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  的收敛区间为  $(-1, 1]$

## 11.2.一

3. 函数  $f(x) = \sin^2 x$  展开成  $x$  的幂级数为\_\_\_\_\_

解  $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \Lambda + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \Lambda$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \Lambda + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \Lambda$$

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 - \Lambda + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \Lambda \right]$$

$$= \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \Lambda + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \Lambda$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

## 11.2.一

4. 函数  $f(x) = \frac{1}{2+x}$  展开成  $x-1$  的幂级数为\_\_\_\_\_

解  $x \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \Lambda + (-1)^n x^n + \Lambda$$

$$f(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{3+x-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{x-1}{3} + \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 + \Lambda + (-1)^n \left(\frac{x-1}{3}\right)^n + \Lambda \right]$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{x-1}{3^2} + \frac{1}{3^3} (x-1)^2 - \frac{1}{3^4} (x-1)^3 + \Lambda + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-1)^n + \Lambda$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-1)^n \quad x \in (-2, 4)$$

## 11.2.二

1. 判别级数  $\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3 \Lambda$   
在  $x=0$  和  $x=1$  处的敛散性.

解  $u_n(x) = \frac{1}{(2n-1)}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n, n=1,2,\Lambda$

$x=0$  时,  $u_n(0) = \frac{2^n}{2n-1}$ , 显然级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n-1}$  发散.

$x=1$  时,  $u_n(1) = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ , 显然级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n$  收敛.

## 11.2.二

2. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^n} x^n$  的收敛半径与收敛域

解 (1) 求收敛半径, 没有缺省项,  $a_n = \frac{1}{n^2 \cdot 2^n}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n^2 \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2(n+1)^2} = \frac{1}{2} = \rho$$
$$R = \frac{1}{\rho} = 2$$

(2) 收敛域 判别端点的敛散性

$x = 2$  时,  $u_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛,

$x = -2$  时,  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  收敛,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^n} x^n$  的收敛区间为  $[-2, 2]$

## 11.2.二

3. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (x-2)^n$  的收敛区间.

解 先求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} t^n$  的收敛区间. (1) 求收敛半径,

没有缺省项,  $a_n = \frac{3^n}{n}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+1} = 3 = \rho \quad R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{3}$$

(2) 收敛域 判别端点的敛散性

$t = \frac{1}{3}$  时,  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} t^n$  的收敛区间为

$t = -\frac{1}{3}$  时,  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  收敛,  $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (x-2)^n$  的收敛区间为  $[\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$

$x-2 \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

## 11.2.二

4. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} x^{2n}$  的收敛域.

解 (1) 求收敛半径, 缺省无穷项,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1) \cdot 4^{n+1}} x^{2n+2}}{\frac{1}{n \cdot 4^n} x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4(n+1)} x^2 = \frac{1}{4} x^2 = \rho$$

当  $\rho < 1$ , 即  $|x| < 2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  绝对收敛,  $R = 2$

当  $\rho > 1$ , 即  $|x| > 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) \not\rightarrow 0$   $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  发散.

(2) 收敛域 判别端点的敛散性

$x = 2$  时,  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} x^{2n}$  的收敛域为

$(-2, 2)$

$x = -2$  时,  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,

## 11.2.二

4. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} x^{2n}$  的收敛域.

解  $x^2 = t$  先求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} t^n$  的收敛域.

(1) 求收敛半径, 没有缺省项,  $a_n = \frac{1}{n \cdot 4^n},$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1) \cdot 4^{n+1}}}{\frac{1}{n \cdot 4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4(n+1)} = \frac{1}{4} = \rho \quad R = \frac{1}{\rho} = 4$$

(2) 收敛域 判别端点的敛散性

$t = 4$  时,  $u_n = \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} t^n$  的收敛域为

$(-4, 4)$

$t = -4$  时,  $u_n = \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} x^{2n}$  的收敛域为  $(-2, 2)$

## 11.2.二

5. 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$  的收敛域.

解 设  $\frac{x-1}{x} = t$ , 先求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n$  的收敛域.

(1) 求收敛半径, 没有缺省项,  $a_n = \frac{1}{n}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 = \rho \quad R = \frac{1}{\rho} = 1$$

(2) 收敛域 判别端点的敛散性

$t = 1$  时,  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n$  的收敛域为  $[-1, 1)$

$t = -1$  时,  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  收敛,  $1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \in [-1, 1)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$  的收敛域为  $[\frac{1}{2}, +\infty)$   $x \geq \frac{1}{2}$

## 11.2.二

6. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  的和函数.

并求级数  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \Lambda + \frac{1}{n \cdot 3^n} + \Lambda$  的和.

解 先求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  的收敛域. (1) 求收敛半径, 没有缺省项,  $a_n = \frac{1}{n}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 = \rho \quad R = \frac{1}{\rho} = 1$$

(2) 收敛域  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  的收敛域为  $[-1, 1)$

再求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  和函数

$$\begin{aligned} x \in (-1, 1), \quad S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^{n-1} dx = \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right) dx \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x), \quad \text{在} [-1, 1) \text{上连续,} \end{aligned}$$

$$x \in [-1, 1), \quad S(x) = -\ln(1-x)$$

## 11.2.二

6. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  的和函数.

并求级数  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \Lambda + \frac{1}{n \cdot 3^n} + \Lambda$  的和.

解  $x \in [-1, 1)$ ,  $S(x) = -\ln(1-x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$$

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \Lambda + \frac{1}{n \cdot 3^n} + \Lambda$$

$$= -\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\ln \frac{2}{3} = \ln \frac{3}{2}$$

## 11.2.二

7. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$  的和函数.

并求级数  $1 + 1 + \frac{3}{2^2} + \Lambda + \frac{n}{2^{n-1}} + \Lambda$  的和.

解 先求  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$  的收敛域. (1) 求收敛半径, 没有缺省项,  $a_n = n$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1 = \rho \quad R = \frac{1}{\rho} = 1$$

(2) 收敛域  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$  的收敛域为  $(-1, 1)$

再求  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$  和函数

$$\begin{aligned} x \in (-1, 1), \quad S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left( \frac{x}{1-x} \right)' \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 1 + \frac{3}{2^2} + \Lambda + \frac{n}{2^{n-1}} + \Lambda = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

## 11.2.二

8. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$  的收敛域与和函数

解 (1) 求收敛半径, 没有缺省项,  $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+2}{n} \right| = 1 = \rho \quad R = \frac{1}{\rho} = 1$$

(2) 收敛域  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$  的收敛域为  $(-1, 1)$

(3) 和函数  $x \in (-1, 1)$ ,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1})'' = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \right)'' \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{1-x} \right)'' = \frac{1}{2} \left( x + 1 + \frac{1}{1-x} \right)'' = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{(1-x)^2} \right)' = \frac{1}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

## 11.2.二

9. 将函数  $f(x) = \arccot x$  展开成  $x$  的幂级数.

解  $x \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \Lambda + (-1)^n x^n + \Lambda$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \Lambda + (-1)^n x^{2n} + \Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$f(x) = \arccot x = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right] dx = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x [(-1)^n x^{2n}] dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2n+1} \quad x \in [-1, 1]$$

## 11.2.二

10. 将函数  $f(x) = \ln(1+x)$  展开成  $(x-2)$  的幂级数.

解  $x \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \Lambda + (-1)^n x^n + \Lambda$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \Lambda + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \Lambda \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

$$f(x) = \ln(1+x) = \ln(1+x-2+2)$$

$$= \ln(3+x-2) = \ln\left[3\left(1+\frac{x-2}{3}\right)\right] = \ln 3 + \ln\left(1+\frac{x-2}{3}\right)$$

$$= \ln 3 + \frac{x-2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{3}\right)^3 - \Lambda + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n + \Lambda$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x-2}{3}\right)^n \quad x \in (-1, 5]$$

## 11.2.二

11. 将函数  $f(x) = \frac{1}{6-5x+x^2}$  展开成  $x-1$  的幂级数.

解  $x \in (-1,1)$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \Lambda + x^n + \Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$f(x) = \frac{1}{6-5x+x^2} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

$$= \frac{1}{-2(1-\frac{x-1}{2})} + \frac{1}{1-(x-1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) (x-1)^n$$

$$x \in (-1,1)$$

## 11.2.二

12. 利用幂级数展开式求

解 级数

$$\frac{1 + \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^8}{9!} + \frac{\pi^{12}}{13!} + \Lambda}{\frac{1}{3!} + \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^8}{11!} + \frac{\pi^{12}}{15!} + \Lambda} = \pi^2$$

$$1 + \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^8}{9!} + \frac{\pi^{12}}{13!} + \Lambda$$

$$\frac{1}{3!} + \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^8}{11!} + \frac{\pi^{12}}{15!} + \Lambda$$

收敛

$$x \in (-\infty, +\infty) \quad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \Lambda + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \Lambda$$

$$\text{令 } x = \pi, \quad 0 = \sin \pi = \pi - \frac{1}{3!}\pi^3 + \frac{1}{5!}\pi^5 - \Lambda + (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \Lambda$$

$$\pi + \frac{1}{5!}\pi^5 + \frac{1}{9!}\pi^9 + \Lambda + \frac{\pi^{4n+1}}{(4n+1)!} + \Lambda = \frac{1}{3!}\pi^3 + \frac{1}{7!}\pi^7 + \frac{1}{11!}\pi^{11}$$

$$\Lambda + \frac{\pi^{4n+3}}{(4n+3)!} + \Lambda$$

$$1 + \frac{1}{5!}\pi^4 + \frac{1}{9!}\pi^8 + = \pi^2 \left( \frac{1}{3!} + \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^8}{11!} + \frac{\pi^{12}}{15!} + \Lambda \right)$$

### 11.2.三

设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$  在  $x_1 = 3$  处发散, 在  $x_2 = -1$  处收敛,  
指出该级数的收敛半径, 并证明之.

证 设  $x-1 = t$ ,

级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  在  $t_1 = 2$  处发散, 因此当  $|t| > 2$  时发散,

在  $t_2 = -2$  处收敛, 因此当  $|t| < 2$  时绝对收敛,

级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  收敛半径  $R = 2$

则级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$  收敛半径  $R = 2$